ヤング率とたわみの関係式

淡幻星

2003.11.4

執筆開始日 2003.11.4〜

1　問題

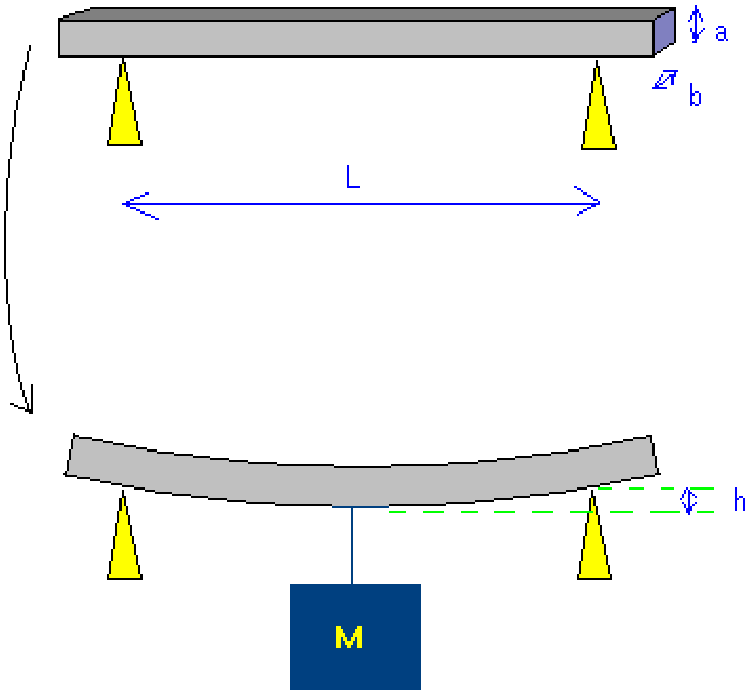

図 1: 実験図

図１のような、高さａ、幅ｂ、長さ（橋脚間）Ｌ、の金属棒に質量Ｍの重りを下げたところ、たわみが生じてｈだけ中心部が下がった。金属棒のヤング率をＥとしたとき、

$$h = \frac{MgL^3}{4a^3bE} \tag{1}$$

という関係式が成り立つことを導け。なお、ｇは重力加速度であり、ヤング率の定義は

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} = \frac{（応力）}{（ひずみ）} \tag{2}$$

である。

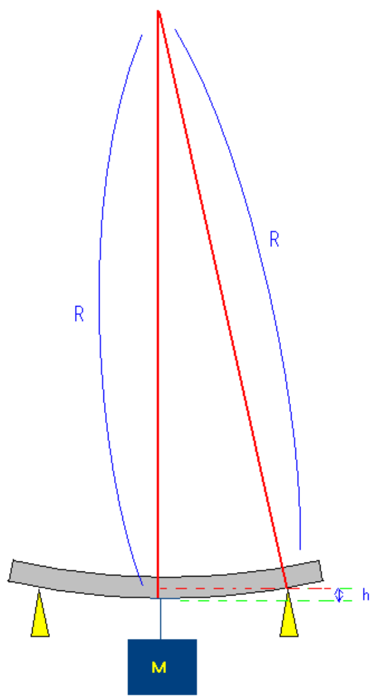

図 2: 曲率

2 解法：その１

たわんでいる金属棒の曲率半径をＲとすると、

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (\frac{1}{2}L)^2 + (R-h)^2 \\
0 &= \frac{1}{4}L^2 - 2Rh + h^2 \\
2Rh &= \frac{1}{4}\{L^2 + 4(\frac{h}{L})^2\} \\
&h \ll L \text{ であるから} \\
2Rh &= \frac{1}{4}L^2 \\
R &= \frac{L^2}{8h}
\end{aligned} \tag{3}
$$

となる（参照：図 2)。

たわんでいる金属棒は、内側が圧縮され外側が引き伸ばされているので、その中間に伸び縮みもしない層ができている（中立層と呼ばれる）。変化は微小であるから、棒の断面は変形後も中間層に垂直になっている。中間層から曲率半径に沿って外向きに距離 r に厚さ dr の薄い層を考える。この薄層の伸縮率を $\delta \equiv \frac{\Delta L}{L}$ とすると、薄層の見込みの角度を θ として

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta L}{L} &= \frac{\text{（変形後の長さ）}-\text{(元の長さ)}}{\text{(元の長さ＝中間層の長さ)}} \\
\delta &= \frac{(R+r)\theta - R\theta}{R\theta} \\
\delta &= \frac{r}{R}
\end{aligned} \tag{4}
$$

となる。

ところで、伸び縮みしている金属棒にはその弾性エネルギー：Ｗが蓄えられているわけで、体積：Ｖの

棒の弾性エネルギーWは伸縮率 δ を使って

$$W = \frac{1}{2} V E \delta^2 \tag{5}$$

と与えられる（これは、F という力で x だけ伸びているヤング率 E の金属棒をさらに dx 伸ばすときの仕事量が $dW = F \cdot dx$ であることを考えれば、積分からすぐ導ける)。

一番内側の薄層の伸縮率：δ_- は

$$\delta_- = -\frac{a/2}{R} \tag{6}$$

であり、その弾性エネルギーは式（5）から

$$\frac{1}{2} \times b \cdot L \cdot dr \times E \times \left(-\frac{a/2}{R}\right)^2 \tag{7}$$

である。中間層の弾性エネルギーはゼロだから、内側全体での弾性エネルギーはその平均

$$\frac{（一番内側）＋（中間層）}{2} \tag{8}$$

と考えて、

$$W_- = \frac{\frac{1}{2} \times b \cdot L \cdot \frac{1}{2} a \times E \times \left(-\frac{a/2}{R}\right)^2}{2} = \frac{a^3 bLE}{32R^2} \tag{9}$$

となる。外側も同様にして

$$W_+ = \frac{a^3 bLE}{32R^2} \tag{10}$$

となるので、棒に蓄えられている弾性エネルギー全体：W は

$$W = W_- + W_+ = \frac{a^3 bLE}{16R^2} \tag{11}$$

とわかる。この弾性エネルギーは W、金属棒が重り M が下に h 下がった分の重力位置エネルギーを受け取った結果なので、

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{a^3 bLE}{16R^2} \\ &\text{式（3）より} \\ Mgh &= \frac{a^3 bLE}{16\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} \\ h &= \frac{MgL^3}{4a^3 bE} \end{aligned} \tag{12}$$

と導かれる。（解答終了）

3　解法：その２

式（5）までは、解法１と同様。

薄層に蓄えられている弾性エネルギー：$\Delta W(r)$ は式（5）から

$$\Delta W(r) = \frac{1}{2} \times L \cdot b \cdot dr \times E \times \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{13}$$

である。棒全体に蓄えられているエネルギー W は r を $-\frac{a}{2}$ から $+\frac{a}{2}$ まで積分して

$$\int \Delta W(r) = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \times L \cdot b \cdot dr \times E \times \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$W = \frac{LbE}{2R^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} r^2 dr$$

$$W = \frac{a^3 bEL}{24R^2} \tag{14}$$

式（3）より

$$W = \frac{a^3 bEL}{24\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$

$$W = \frac{8a^3 bEh^2}{3L^3}$$

とわかる。蓄えられた弾性エネルギーは、重りが失った重力位置エネルギーに等しいから、

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{8a^3 bEh^2}{3L^3} \\ h &= \frac{3MgL^3}{8a^3 bE} \end{aligned} \tag{15}$$

と導かれる。（解答終了）

4　疑問

解法１と解法２の違いは、金属棒の弾性エネルギーを求めるときに、中間層と両側の薄層との平均として考えるか、それぞれの薄層の積分として考えるかである。普通に考えると積分だと思うのだけど、そーすると係数があわない。１／４であるはずの係数が３／８になってしまう。まぁ３／８　２／８＝１／４で、そんなに変わりはないといえばそうなんだけどどーも腑に落ちない。軽くネットも漁ってみたけれど、ヤング率とたわみの量の関係式は見当たらず。う〜む。

そんなわけで「正解はコレ」とか「すくなくとも、その考えはオカシイ」という指摘、待っています。

参考文献

[1] 基礎物理学コース　（江幡　武、内田和喜男、坪田博明）　学芸図書出版社