

ヤング率とたわみの関係式

淡幻星

2003.11.4

執筆開始日 2003.11.4 ~

1 問題

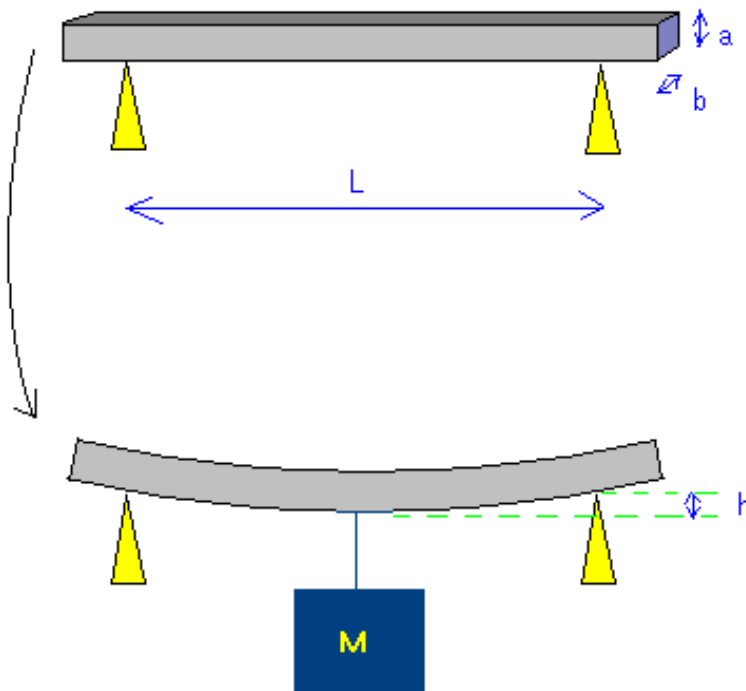


図 1: 実験図

図 1 のような、高さ a 、幅 b 、長さ (橋脚間) L 、の金属棒に質量 M の重りを下げたところ、たわみが生じて h だけ中心部が下がった。金属棒のヤング率を E としたとき、

$$h = \frac{MgL^3}{4a^3bE} \quad (1)$$

という関係式が成り立つことを導け。なお、 g は重力加速度であり、ヤング率の定義は

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} = \frac{(\text{応力})}{(\text{ひずみ})} \quad (2)$$

である。

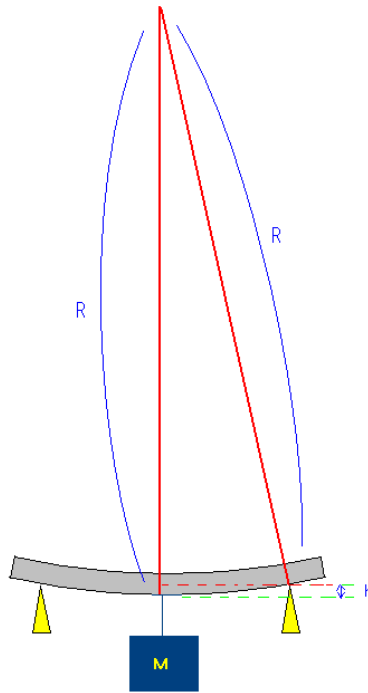


図 2: 曲率

2 解法：その 1

たわんでいる金属棒の曲率半径を R とすると、

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + (R-h)^2 \\
 0 &= \frac{1}{4}L^2 - 2Rh + h^2 \\
 2Rh &= \frac{1}{4}\left\{L^2 + 4\left(\frac{h}{L}\right)^2\right\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$h \ll L$ であるから

$$\begin{aligned}
 2Rh &= \frac{1}{4}L^2 \\
 R &= \frac{L^2}{8h}
 \end{aligned}$$

となる（参照：図 2）。

たわんでいる金属棒は、内側が圧縮され外側が引き伸ばされているので、その中間に伸び縮みもしない層ができていく（中立層と呼ばれる）。変化は微小であるから、棒の断面は変形後も中間層に垂直になっている。中間層から曲率半径に沿って外向きに距離 r に厚さ dr の薄い層を考える。この薄層の伸縮率を $\delta \equiv \frac{\Delta L}{L}$ とすると、薄層の見込みの角度を θ として

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta L}{L} &= \frac{(\text{変形後の長さ}) - (\text{元の長さ})}{(\text{元の長さ} = \text{中間層の長さ})} \\
 \delta &= \frac{(R+r)\theta - R\theta}{R\theta} \\
 \delta &= \frac{r}{R}
 \end{aligned} \tag{4}$$

となる。

ところで、伸び縮みしている金属棒にはその弾性エネルギー： W が蓄えられているわけで、体積： V の

棒の弾性エネルギー W は伸縮率 δ を使って

$$W = \frac{1}{2}VE\delta^2 \quad (5)$$

と与えられる（これは、 F という力で x だけ伸びているヤング率 E の金属棒をさらに dx 伸ばすときの仕事量が $dW = F \cdot dx$ であることを考えれば、積分からすぐ導ける）。

一番内側の薄層の伸縮率： δ_- は

$$\delta_- = -\frac{a/2}{R} \quad (6)$$

であり、その弾性エネルギーは式 (5) から

$$\frac{1}{2} \times b \cdot L \cdot dr \times E \times \left(-\frac{a/2}{R}\right)^2 \quad (7)$$

である。中間層の弾性エネルギーはゼロだから、内側全体での弾性エネルギーはその平均

$$\frac{(\text{一番内側}) + (\text{中間層})}{2} \quad (8)$$

と考えると、

$$W_- = \frac{\frac{1}{2} \times b \cdot L \cdot \frac{1}{2}a \times E \times \left(-\frac{a/2}{R}\right)^2}{2} = \frac{a^3bLE}{32R^2} \quad (9)$$

となる。外側も同様にして

$$W_+ = \frac{a^3bLE}{32R^2} \quad (10)$$

となるので、棒に蓄えられている弾性エネルギー全体： W は

$$W = W_- + W_+ = \frac{a^3bLE}{16R^2} \quad (11)$$

とわかる。この弾性エネルギーは W 、金属棒が重り M が下に h 下がった分の重力位置エネルギーを受け取った結果なので、

$$Mgh = \frac{a^3bLE}{16R^2}$$

式 (3) より

$$Mgh = \frac{a^3bLE}{16\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} \quad (12)$$

$$h = \frac{MgL^3}{4a^3bE}$$

と導かれる。(解答終了)

3 解法：その 2

式 (5) までは、解法 1 と同様。

薄層に蓄えられている弾性エネルギー： $\Delta W(r)$ は式 (5) から

$$\Delta W(r) = \frac{1}{2} \times L \cdot b \cdot dr \times E \times \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (13)$$

である。棒全体に蓄えられているエネルギー W は r を $-\frac{a}{2}$ から $+\frac{a}{2}$ まで積分して

$$\begin{aligned}\int \Delta W(r) &= \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \times L \cdot b \cdot dr \times E \times \left(\frac{r}{R}\right)^2 \\ W &= \frac{LbE}{2R^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} r^2 dr \\ W &= \frac{a^3 b E L}{24 R^2}\end{aligned}\tag{14}$$

式(3)より

$$\begin{aligned}W &= \frac{a^3 b E L}{24 \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} \\ W &= \frac{8a^3 b E h^2}{3L^3}\end{aligned}$$

とわかる。蓄えられた弾性エネルギーは、重りが失った重力位置エネルギーに等しいから、

$$\begin{aligned}Mgh &= \frac{8a^3 b E h^2}{3L^3} \\ h &= \frac{3MgL^3}{8a^3 b E}\end{aligned}\tag{15}$$

と導かれる。(解答終了)

4 疑問

解法1と解法2の違いは、金属棒の弾性エネルギーを求めるときに、中間層と両側の薄層との平均として考えるか、それぞれの薄層の積分として考えるかである。普通に考えると積分だと思うのだけど、そうすると係数があわない。1/4であるはずの係数が3/8になってしまう。まあ $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ で、そんなに変わりはないといえばそうんだけどどーも腑に落ちない。軽くネットも漁ってみたけれど、ヤング率とたわみの量の関係式は見当たらず。う~む。

そんなわけで「正解はコレ」とか「すくなくとも、その考えはオカシイ」という指摘、待っています。

参考文献

- [1] 基礎物理学コース（江幡 武、内田和喜男、坪田博明） 学芸図書出版社