ブラックホールへ落下する物体の動きについて

淡幻星

2010.05.20〜

第1章　概要【仮題】

物体がブラックホールへの落下するとき、どのように落下するかを考えてみる。特に、落下開始直後とブラックホールの表面の直前の動きに注目する。
簡単のため、物体の初速度はゼロ、十分な遠方からゆっくり落下を開始する場合を考える。
(※物体の落下の様子に注目したいので、その前提となる式の導出はだいぶ省略してます。)

1.1　料理の方針

たとえば、木からの林檎の自由落下を考えるときは「ニュートンの万有引力の式 (法則) に従う」と仮定してコレを解く。
より具体的には、ニュートンの万有引力の式

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) \tag{1.1}$$

$$F(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \qquad \text{※ U は万有引力のポテンシャル} \tag{1.2}$$

を用いると、考える系の「質量分布 $\rho(t,\vec{r})$ 」から「対象の物体に働く力 $\vec{F}(t,\vec{r})$ 」を求めることができる。次に、これを元に「ニュートンの運動方程式 $\vec{F}(t,\vec{r}) = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ 」を用いて物体の動き $\vec{r}(t)$ を求めるのである。

それに習いここでは、物体がブラックホールへ落下するときは「アインシュタインの一般相対論の式 (法則) に従う」と仮定してコレを解く。(※以下、数式にはアインシュタインの縮約表記を用いるとする)

1.2　料理の材料

アインシュタインの一般相対論の式 (アインシュタイン方程式) は以下である。

$$R_{il} - \frac{1}{2}g_{il}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{il} \tag{1.3}$$

この式を用いると、考える系の「エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ 」から「空間の計量 $g_{\mu\nu}$ 」を求めることが出来る。ここで、$g_{il}g^{lk} = \delta_i^k$ の関係があり、他の記号 $R_{\mu\nu}, R$ は $g_{\mu\nu}$ の関数であり、以下で表現される。

$$\text{リッチのテンソル} \quad R_{il} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} \tag{1.4}$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{1.5}$$

クリストッフェルの記号

$$\text{スカラ曲率} \quad R = g^{ik}R_{ik} \tag{1.6}$$

また、重力が弱くかつ変化せず、対象となる物体の動きが光速に比べて十分に遅いとき、計量 g_{00} と万有引力のポテンシャル U には以下の関係がある。※その条件下において、アインシュタイン方程式はニュートンの万有引力の式と等しくなるため。

$$g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2}U \tag{1.7}$$

次に、「空間の計量 $g_{\mu\nu}(t, \vec{r})$ 」を元に物体 (質量 m) の動き $\vec{r}(t)$ を求めるには、以下の「ハミルトン・ヤコビの方程式」を用いる。

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0 \tag{1.8}$$

ここで「作用 S 」は、物体が動径方向のみの運動を行うと仮定すると、

$$S(t, r) = -E_0 t + S_r(r) \tag{1.9}$$

$$E_0 = mc^2\sqrt{g_{00}}|_{\text{静止時}} \tag{1.10}$$

$$r \equiv |\vec{r}| \tag{1.11}$$

で与えられる。

以上を用いて、料理を行う。

第2章　算出【仮題】

以下のようにして取り組む。

妥当な系においてアインシュタイン方程式を解く⇒物体が十分遠方から落下する動きを求める⇒落下開始直後と、ブラックホールの表面直前での動きに注目する。

2.1　アインシュタイン方程式を解く

以下の条件における、計量 $g_{\mu\nu}$ を求める。

1. 質量分布は球対称である。
2. 質量分布は時間変化しないとする。
3. 質量は中心付近にのみ分布してるとし、物体の落下を考える領域は「真空である」とする。

上記の条件は、以下のように読み替えられる。

1. 球対称。　⇒　球面座標系で考え、θ, ϕ 依存性が無い。
2. 時間変化しない。　⇒　$g_{\mu\nu} = g(r)$ である。
3. 真空。　⇒　$T_{\mu\nu} = 0$ である。

この条件下で、アインシュタイン方程式 (式 1.3) を**すごくがんばって**解くと、以下の表式となる。(※具体的には $g_{\mu\nu}$ に適当な関数 $\exp(\lambda(r))$ を仮定して放り込み、その微分方程式を解く。)

$$g_{ik}(r) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Const.}{r} & 0 & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\frac{Const.}{r}} & & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ここで、$Const.$ は定数であり「対象の領域 (＝真空の部分) の**外の要因**」で決まる。具体的には、「対象外とした、質量の存在する中心付近」で決まる。

この定数 $Const.$ を決定するためには、十分遠方を考える。このとき重力は弱く、また今「時間変化しない」としているので、これはニュートンの万有引力と一致する。中心付近の質量の総量を M とすると、万有引力のポテンシャルが $U = -\frac{GM}{r}$ で表現されることと、(式 1.7) から $Const. = \frac{2GM}{c^2}$ と決定することが出来る。

この値はシュヴァルツシルトの半径 r_g と呼ばれ、これを用いると (式 2.1) は以下のように表現される。

$$g_{ik}(r) = \begin{bmatrix} 1-\frac{r_g}{r} & 0 & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} & & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2} \tag{2.3}$$

これは、「シュヴァルツシルト解」と呼ばれるものであり、アインシュタイン方程式の特殊解の一つとしてシュヴァルツシルトが導いたものである。

なお、r_g は「(回転せず電荷も持たない) ブラックホールの半径」と言われている。

2.2　ブラックホールへ落下する物体の動きを解く

次に、上記の条件下での物体の動きを考える。

1. 物体は $t = t_0$ において、静止している。
2. 物体は $t = t_0$ において、中心から十分遠方 ($r >> r_g$) にある。
3. 物体は $t = t_0$ において、静止している (角速度もゼロ)。
4. 物体自身の質量による空間への影響は無視できるものと擦る。

(式 1.8) へ、 $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$ であることに注意して (式 2.2) を代入する。角速度が無いことから θ と ϕ の項は落ちるので、

$$(1-\frac{r_g}{r})^{-1}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + (1-\frac{r_g}{r})\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2c^2 \tag{2.4}$$

となる。知りたいのは t と r の関係なので、(式 1.9) を代入して整理すると、

$$S_r(r) = -\int dr(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m^2c^2(1 - \frac{r_g}{r})} \tag{2.5}$$

と変形できる。ここで一方で (式 1.9) より

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial S(t,r)}{\partial E_0} &= -t + \frac{\partial S_r(r)}{\partial E_0} \\ t &= \frac{\partial S_r(r)}{\partial E_0} \\ t &= -\int dr \frac{\partial}{\partial E_0}\left[(1 - \frac{r_g}{r})^{-1}\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m^2c^2(1 - \frac{r_g}{r})}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

であるから、時間 $t_0 \to t$ のときの位置の変化 $r_0 \to r$ との関係は、

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}}\int_r^{r_0} \frac{d\xi}{(1 - \frac{r_g}{\xi})\sqrt{\frac{r_g}{\xi} - \frac{r_g}{r_0}}} \tag{2.7}$$

と求まる。

2.3　落下直後の動き

$r \sim r_0$ のとき、$y \equiv r_0 - r(r_0 > r)$ とすると、

$$\begin{aligned} c(t - t_0) &= \sqrt{\frac{r_0^2}{r_g}\left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)}\int_y^0 d\xi \frac{-1}{\left[1 - \frac{r_g}{r_0}\left(1 - \frac{\xi}{r_0}\right)^{-1}\right]\left(1 - \frac{\xi}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}} \\ & \quad \frac{r_g}{r_0} << 1, \frac{\xi}{r_0} << 1 \text{ であるから} \\ &\simeq \sqrt{\frac{r_0}{r_g}}\int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \\ &= \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \cdot 2y^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{r_g}{r_0} \cdot \frac{1}{4}(t-t_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{GM}{r_0^2}(t-t_0)^2 \\
r &= r_0 - \frac{1}{2}\frac{GM}{r_0^2}(t-t_0)^2 \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

となり、これはいわゆる重力落下の式。

2.4　ブラックホール表面直前の動き

$r \sim r_g$ のとき、$\zeta \equiv r - r_g (r > r_g)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{r_g}{r} &= \frac{r_g}{r_g+\zeta} \\
&= \frac{1}{1+\frac{\zeta}{r_g}} \\
&\simeq 1 - \frac{\zeta}{r_g} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

であるから $r_1 = r + \Delta r$ で積分を分けて、表面直前 $(r_1 > r > r_g)$ での動きに注目すると

$$
\begin{aligned}
c(t-t_0) &= \sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}}\left\{\int_{r_1}^{r_0}\frac{d\xi}{(1-\frac{r_g}{\xi})\sqrt{\frac{r_g}{\xi}-\frac{r_g}{r_0}}} + \int_{r}^{r_1}\frac{d\xi}{(1-\frac{r_g}{\xi})\sqrt{\frac{r_g}{\xi}-\frac{r_g}{r_0}}}\right\} \\
&\simeq \sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}}\left\{Const1.(r_1) + \int_{r}^{r_1}\Big(\frac{1}{2}+r_g\frac{1}{\zeta-r_g}\Big)d\zeta\right\} \\
&= \sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}}\left\{Const1.(r_1) + \Big[\frac{1}{2}\zeta + r_g\ln\zeta\Big]_{\zeta=r-r_g}^{\zeta=r_1-r_g}\right\} \\
&= \sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}}\left\{Const1.(r_1) + \Big(\frac{1}{2}r1 + r_g\ln(r_1-r_g)\Big)\right. \\
&\qquad \left. - \Big(\frac{1}{2}r + r_g\ln(r-r_g)\Big)\right\} \\
&\qquad \text{ここで、} 0 < r - r_g << 1 \text{であるから} \\
&\sim -\ln(r-r_g) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$r \sim e^{-t} + r_g \tag{2.12}$$

となり、落下位置はブラックホール表面 $(r = r_g)$ の手前で張り付くように動かなくなり、無限遠方からは落下速度が表面手前で直前で急激にゼロに近づき、凍りつくかのように見える ($|\frac{dr}{dt}| \sim e^{-t} \to +0$)。

関連図書

[1] ここに参考文献を書く。 斜体はこれ, **7**, 473 (1997). (2004).