

雑記  
1次元調和振動子

～量子論と古典論：微妙にラグランジュ～

Handle Name：淡幻星

H P： <http://homepage3.nifty.com/fluorite/>

2003.7.22～7.26 / 7.31～

…内容がこんがらがってきたぞ？

# 1 古典論と量子論とでは何が違うのか

古典論と量子論で何が違うのか？ それはいろいろあり、「根本から違う」と言う人もいるかもしれないが、有名な違いとして『古典論では、いくらでも小さい単位でエネルギーをとり得るが、量子論では下限が存在する』ことと『同時に正確には測れない量が存在する（不確定性原理）』ことがあげられるのではないだろうか。

この違いが実際どのような違いとなって現れるのか、それを1次元調和振動子を例にして見てみたいと思う。1次元調和振動子とは、中心からのずれに比例した復元力が働く物体の運動、たとえばバネに吊るされた球（重り）の振動のことと思ってよい。“時間と共に重りがどう動くのか（振動するのか）”を考えることが普通は多いが、古典論と量子論の違いをみるには存在確率を、例えば“一定間隔で100回写真を撮ったら、どの位置に何回ずつ写っているか”ということである。中心から一定間隔ごとに区切り、それぞれの範囲に球がある確率を考えてみる。そうすると球のエネルギーが小さいとき、つまり振幅が小さいときに両者の違いが見えてくる。

ところで、量子論では1次元調和振動子の場合、とり得るエネルギーの最小値（最小単位）は

$$E = \frac{h}{4\pi} \omega_0 \tag{1}$$

となる。ここで、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \quad k : \text{バネ定数} \quad m : \text{質量} \quad T : \text{振動周期} \tag{2}$$

である。 $h = 6.6260755 \times 10^{-34} [Js]$  はプランク定数であり、見ての通りエネルギーの最小単位というのは非常に小さい。なので普通は無視できる。これを0と見なしたものが古典論で、そうでないのが量子論なのだが、以下では仮に

$$h = 8, m = 1, \omega_0 = 1 \tag{3}$$

として考える。そうすると、最小エネルギーは

$$E = 0.64 \tag{4}$$

となる。最小エネルギーに近い  $E = 1.92$  の場合（A）と、その約5倍の  $E = 8.32$  の場合（B）とで、古典力学的に考えた場合と量子力学的に考えた場合のそれぞれ存在確率の分布を下に示す。Aは図1であり、Bは図2である。それぞれ0.5ずつ区切ってその範囲の存在確率を棒グラフ風に表示してある。写真をn回とったときの、球の写っている場所の度数分布とってもらっても良い。真中の白い部分が球の（古典的な）振動範囲を示している。つまり両端で、バネが伸びきって球の速度はゼロになっている。

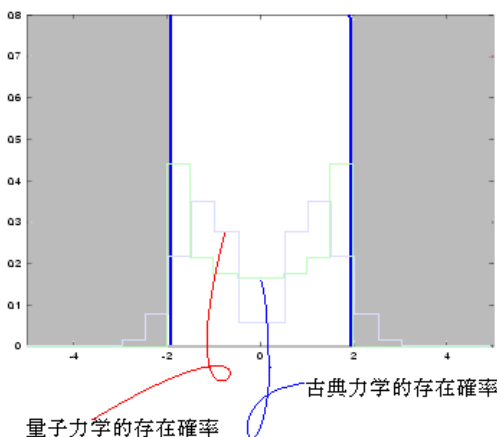


図 1: A の場合

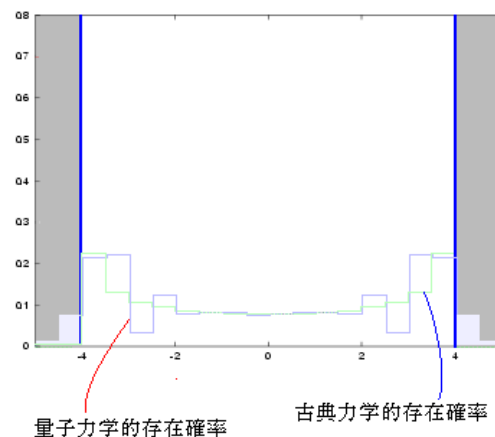


図 2: B の場合

Bでは両者はだいたい似ているが、Aではだいぶ違っているのが分かるだろう。写真の度数分布と考えれば、両わきで速度の落ちるで、常識的には球が両端に写った写真が多くなるように思われる。実際、古典力学的に考えた場合の存在確率は、両端が高く真中は低い。ところが、Aにおいて、量子力学的に考えた場合はそれとは違って、両わきから少し離れた二箇所でも最大になっている。そして不思議なことに実際の物理現象はそのようになっていることがわかっているのだ（つまり、確率が最大になるのは両端ではない）。なお、エネルギーが大きくなると、量子力学的に考えた場合と古典力学的に考えた場合それぞれの存在確率分布はだいたい同じ様子になることがBから予想される。

もう一つの違いは、球の振動範囲の外では古典力学的にはもちろん存在確率はゼロであるが、なんと量子力学的にはゼロではないことだ。これは不確定性原理に関係がある。

以下では、それぞれの考え方を方程式の面から詳しく違い見て見ようと思う。以下の話では、高校レベルのバネの振動問題が解ける、微分方程式の意味していることが分かる（解けなくてもよいが、「解く」の意味は分かる）、シュレーディンガー方程式の名前を聞いたことがある、ことを前提に話しを進めています。

## 2 方程式の面から詳しく違いしてみる

### 2.1 古典力学での考え方

調和振動子の運動方程式は、(運動エネルギー) + (ポテンシャルエネルギー) = (全エネルギー) であることから

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E \quad (5)$$

とできる。運動量  $p = mv$  を用いて表すと

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2m}p^2 = E \quad (6)$$

である。なおこの式(5)は、両辺を時間  $t$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \right) &= \frac{d}{dt} E \\ \frac{1}{2}k \frac{d}{dt} (x^2) + \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (v^2) &= 0 \\ kx \times \frac{dx}{dt} + m \frac{dv}{dt} \times v &= 0 \\ kx \times v + m \frac{dv}{dt} \times v &= 0 \\ kx + m \frac{dv}{dt} &= 0 \\ kx + m \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \end{aligned} \quad (7)$$

という見慣れた運動方程式(質量×加速度=力)になる。この式を解く前に以下では少し脱線する。嫌な人は飛ばし読みして、ページ5の式(15)へ進んでください。

運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $U$  について、式(5)では

$$E(v, x) = T(v) + U(x) \quad (8)$$

という量考えた。Eは全エネルギーを表し、この両辺の時間微分を考えると運動方程式が導き出された(式(7)を参照)。ではこんな量  $L$  を考えたら、これは何を意味するのだろうか?

$$L(v, x) = T(v) - U(x) \quad (9)$$

単純に答えれば、“運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差”であるが、それはそれとして、ここでは

$$I = \int_B^A L dt \quad (10)$$

という量  $I$  が極小になるときを考えてみる。ただし、 $A, B$  は定数で  $L$  が変化しても  $L(A), L(B)$  は変化しないという条件をつける。 $I$  が極小となる  $L$  があつたとして、そこから少しだけずれた  $L' = L + \Delta L$  に対応する  $I' = I + \Delta I$  は、二次曲線の頂点や、三次曲線の極地を考え

れば想像がつくが、 $\Delta I = 0$  となっているはずである。よって、

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta I &= \int_B^A \Delta L dt \\
 &= \int_B^A \{L'(v, x) - L(v, x)\} dt \\
 &= \int_B^A \left\{ \left( L + \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial v} dv \right) - L \right\} dt \\
 &= \int_B^A \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial v} dv \right\} dt \\
 &= \int_B^A \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{d}{dt}(dx) \right\} dt \\
 &= \int_B^A \left\{ dx \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} dx \right) - dx \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} dt \\
 &= \left[ \frac{\partial L}{\partial v} dx \right]_B^A + \int_B^A \left\{ dx \frac{\partial L}{\partial x} - dx \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} dt
 \end{aligned} \tag{11}$$

$L(A)$  ,  $L(B)$  は変化しないとしているので、 $dx(A) = dx(B) = 0$  となり、式(11)は

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_B^A dx dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} \\
 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。まとめると

$$\int_B^A L dt \text{ が最小} \quad \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) \tag{13}$$

であるわけだが、 $L(v, x) = T(v) - U(x)$  なので式(12)は

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right) \\
 &= kx - \frac{d}{dt}(mv) \\
 &= kx - m \frac{dv}{dt} \\
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx
 \end{aligned} \tag{14}$$

という、こちらもまた見慣れた運動方程式となる。なお、 $L$  はラグランジアンと呼ばれる。

さて式(7)を解くと

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

となる。 $a, \phi$  は定数である。速度はこの式(15)を微分して

$$v(t) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{16}$$

である。式 (15) と式 (16) を式 (5) に代入して

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}k\{a \sin(\omega_0 t + \phi)\}^2 + \frac{1}{2}m\{a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)\}^2 &= E \\
 \frac{1}{2}m\omega_0^2\{a \sin(\omega_0 t + \phi)\}^2 + \frac{1}{2}m\{a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)\}^2 &= E \\
 \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \{\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)\} &= E \\
 \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 &= E \\
 a &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}
 \end{aligned} \tag{17}$$

である。あとは初期条件から  $\phi$  を求めれば普通は終わりなわけだが、ここではその確率分布を考えてみる。  
 粒子を  $(x, x + dx)$  の微小幅の間に見出す確率を  $W_{classic}(x)dx$  とする。振動の周期  $T$  は

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{18}$$

である。ところで、位置と速度の取りうる状態の全ては時間  $0 \leq t < T$  に含まれるので、この時間の中で考えればよい。ここで、ある  $x = x_0$  という位置をとるのは  $t = t_1, t_2$  の二つの時刻である。それぞれの時刻をとりうる確率は共に  $\frac{1}{T}$  である（正確に言うと、 $(t, t + dt)$  という微小時間幅の間に見出す確率が  $\frac{1}{T}dt$  である）。さて、粒子を  $x_0, x_0 + dx$  の微小幅の間に見出す確率は、微小時間幅  $(t_1, t_1 + dt)$  もしくは  $(t_2, t_2 + dt)$  に見出す確率に等しいので、

$$W_{classic}(t)dx = \frac{1}{T}dt + \frac{1}{T}dt = \frac{2}{T}dt \tag{19}$$

と書くことができる。これはさらに変形できて、

$$\begin{aligned}
 W_{classic}(x)dx &= \frac{2}{T}dt \\
 &= \frac{2}{T} \frac{dt}{dx} dx \\
 &= \frac{2}{T} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} dx \\
 &= \frac{2}{T} \frac{1}{v} dx
 \end{aligned} \tag{20}$$

となり、式 (5) と式 (17) から

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 &= E \\
 \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \\
 \omega_0^2 x^2 + v^2 &= a^2\omega_0^2 \\
 v &= \pm\omega_0\sqrt{a^2 - x^2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

であるから、この式 (21) と、さらに式 (18) を式 (20) に代入して

$$\begin{aligned}
 W_{classic}(x)dx &= \frac{2}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1}{\pm\omega_0 a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dx \\
 W_{classic}(x)dx &= \pm \frac{1}{\pi a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx
 \end{aligned} \tag{22}$$

以上をまとめると、確率分布  $W_{classic}(x)$  が正であること考えて、

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \tag{23}$$

の運動方程式で記述されるエネルギー  $E$  の調和振動子の確率分布関数は

$$W_{classic}(x)dx = \frac{1}{\pi a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx \quad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \quad (24)$$

となる。

## 2.2 量子力学での考え方

量子力学においては、運動方程式における運動量  $p$  を

$$p = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (25)$$

と考える。なお  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  である。さて、式(6)の両辺に右から任意の関数  $\psi(x)$  を掛けた式

$$\frac{1}{2m} p^2 \psi(x) + \frac{1}{2} kx^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (26)$$

を考える。この式(26)を、運動量  $p$  を用いて書き換えた式

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (27)$$

が量子力学における調和振動子の運動方程式であり、これは『時間に依存しないシュレーディンガー方程式』である。運動量  $p$  の部分が微分演算子 (= 微分の記号) に書き換わったので、当然関数  $\psi(x)$  は任意ではなくなる。この方程式を満たす関数  $\psi(x)$  を、この方程式が表す運動を記述する『波動関数』と呼び、 $|\psi(x)|^2$  が確率分布関数となる(と考えると、実際の物理現象を上手く説明できる)。

なお、普通は

$$H\psi(x) = E\psi(x) \quad H \equiv -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (28)$$

と書くことが多い。Hをハミルトニアンと呼ぶ。

方程式(27)を解く(=  $\psi(x)$  について解く)と、導出は複雑なので省略するが、

$$E = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (29)$$

のとき(これを  $E_n$  と書く)

$$\psi(x) = N_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right) H_n(\alpha x)$$

ただし

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$$

$$N_n \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (\text{ロドリゲスの公式。参照 [1].})$$

もしくは

$$H_n(\xi) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-2j)!} (2\xi)^{n-2j} \quad (\text{級数解表示。参照 [2].})$$

であり、それ以外の  $E$  では物理的に意味のある解を持たない。

つまりエネルギーとして、上記の値のみが許される(実際の物理現象がそうなっている)。 $H_n(\xi)$  はエルミート多項式と呼ばれ、特殊関数であり(表記としては  $\sin(x)$  とかの仲間と私は思ってます。sin は初等関数ですが)、微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad (31)$$



の二つある（独立）解のうちの一つである。その具体的な形をいくつか下に示す。

$$\begin{aligned}
 H_0(\xi) &= 1 \\
 H_1(\xi) &= 2\xi \\
 H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2 \\
 H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi \\
 H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\
 H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 129\xi \\
 &\vdots \\
 H_{10}(\xi) &= 1024\xi^{10} - 23040\xi^8 + 161280\xi^6 - 403200\xi^4 + 302400\xi^2 - 30240 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{32}$$

古典力学のときと同様に確率分布関数  $W_{quantum}(x)$  を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
 W_{quantum}(x)_n dx &= |\psi(x)|^2 dx \\
 &= \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) H_n^2(\alpha x) dx
 \end{aligned} \tag{33}$$

具体的な形をいくつか書いてみると

$$\begin{aligned}
 W_{quantum}(x)_0 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \\
 W_{quantum}(x)_1 &= \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \alpha^2 x^2 e^{-\alpha^2 x^2} \\
 W_{quantum}(x)_2 &= \frac{\alpha}{8\sqrt{\pi}} (16\alpha^4 x^4 - 16\alpha^2 x^2 + 4) e^{-\alpha^2 x^2} \\
 W_{quantum}(x)_3 &= \frac{\alpha}{48\sqrt{\pi}} (64\alpha^6 x^6 - 192\alpha^4 x^4 + 144\alpha^2 x^2) e^{-\alpha^2 x^2} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{34}$$

となる。

以上をまとめると、

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 \psi(x) = E \psi(x) \tag{35}$$

という（時間に依存しない）シュレーディンガー方程式で記述される、エネルギー

$$E_n = \hbar \omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{36}$$

の調和振動子の確率分布関数は

$$W_{quantum}(x)_n dx = \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) H_n^2(\alpha x) dx \tag{37}$$

となる。

### 3 量子力学と古典力学の確率分布関数の比較

前節までの結果を改めて書く。  $F(x) = -kx$  の外力（位置ポテンシャル力）が働く調和振動子の確率分布関数は、量子論の方に合わせて（古典論では任意のエネルギーを取れるから）エネルギーが

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (38)$$

であるとき、

量子力学的には

$$W_{quantum}(x)_n dx = \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) H_n^2(\alpha x) dx \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \quad (39)$$

古典力学的には

$$W_{classic}(x) dx = \frac{1}{\pi a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx \quad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \quad (40)$$

となることがわかった。次に、実際の様子を見るために例として  $n=1, 6$  の場合を考えてみたい。仮に、  $m = 1, \omega_0 = 1, \hbar = \frac{4}{\pi}$  とする。

$n=1$  のとき、

$$E = \frac{4}{\pi} \times \frac{3}{2} \simeq 1.91 \quad \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad a = \sqrt{2 \times \frac{4}{\pi} \times \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{12}{\pi}} \simeq 1.95$$

なので

$$W_{quantum}(x)_1 = \frac{1/2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} (2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)^2 e^{-(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)^2} = \frac{\pi}{4} x^2 e^{-\frac{\pi x^2}{4}}$$

$$W_{classic}(x)_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{12}{\pi}}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{\frac{12}{\pi}}})^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{12}{\pi} - x^2}}$$

となる。これをグラフにプロットすると図3のようになる。

$n=6$  のとき、

$$E = \frac{4}{\pi} \times \frac{13}{2} \simeq 8.28 \quad \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad a = \sqrt{2 \times \frac{4}{\pi} \times \frac{13}{2}} = \sqrt{\frac{52}{\pi}} \simeq 4.07$$

なので

$$W_{quantum}(x)_6 = \frac{1/2\sqrt{\pi}}{2^6 \cdot 6! \cdot \sqrt{\pi}} \left(2^6 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right)^6 - \frac{6!}{4!} 2^4 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right)^4 + \frac{6!}{2! \cdot 2!} 2^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right)^2 - \frac{6!}{3!}\right)^2 e^{-(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x)^2}$$

$$= \frac{1}{92160} (\pi^3 x^6 - 30\pi^2 x^4 + 180\pi x^2 - 120)^2 e^{-\frac{\pi x^2}{4}}$$

$$W_{classic}(x)_6 = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{52}{\pi} - x^2}}$$

となる。これをグラフにプロットすると図4のようになる。それぞれ、真中の白い部分が古典的振動幅（ $-a$   $x$   $a$ ）である。

違いは一目瞭然である。古典力学的な確率分布関数は両わきが高く中心が低いすり鉢型をしているのに対し、量子力学的な確率分布関数は幾つかのピークを持った波形をしていることがわかる。そして量子力学

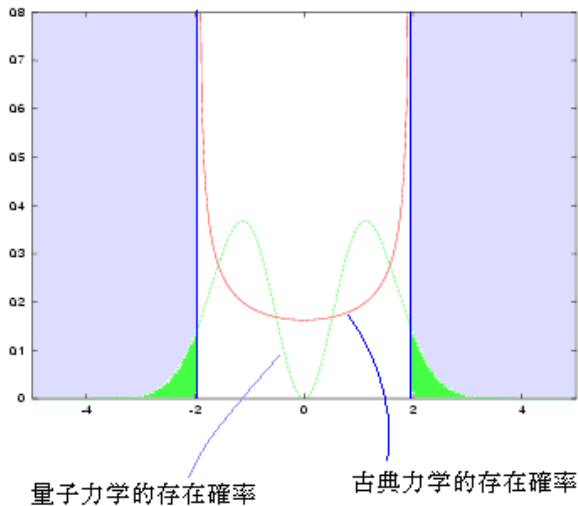


図 3:  $E = 1.91$  のときの確率分布関数

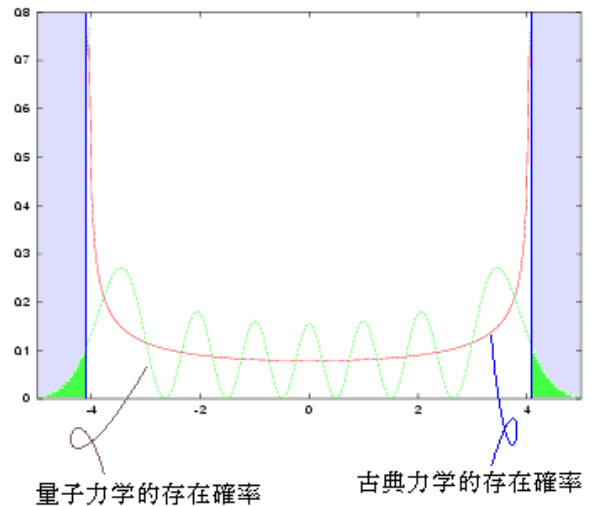


図 4:  $E = 8.28$  のときの確率分布関数

的確率分布関数は、古典力学的には存在し得ない位置にも染み出しているのが特徴だが、これを論ずる前に『存在位置にある程度の幅を持たせて観測したときはどうなるか』を見てみることにする。例として位置の精度を  $\Delta x = 0.5$  としたときの存在確率の分布をそれぞれ図 5 と図 6 に示す。これは図 7~10 のように  $\Delta x = 0.5$  の間隔で平均したものである。  $\Delta x \rightarrow 0$  としたものが図 3, 図 4 となる。そして現実には“無限小の精度”は存在しないので、実際に相手にするのは有限の位置精度  $\Delta x$  をもった存在確率分布である。図 6 から、エネルギー  $E$  が大きくなると、両者は似た動向を示すことが予想される。よって古典力学的な確率分布関数の扱いは、エネルギー  $E$  が大きい場合における量子力学的な確率分布関数のよい近似と言える。

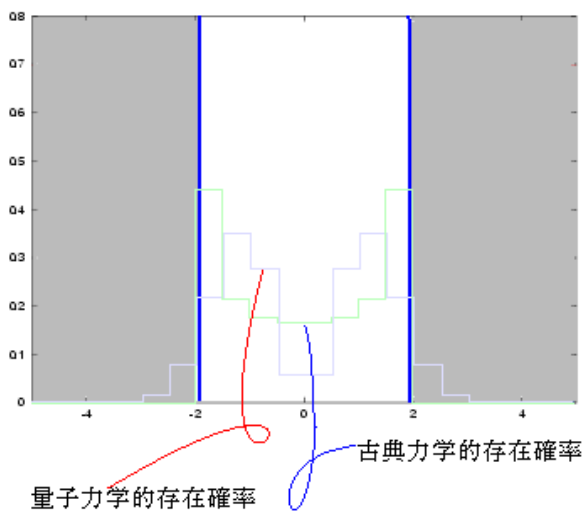


図 5:  $E = 1.91$  のときの確率分布

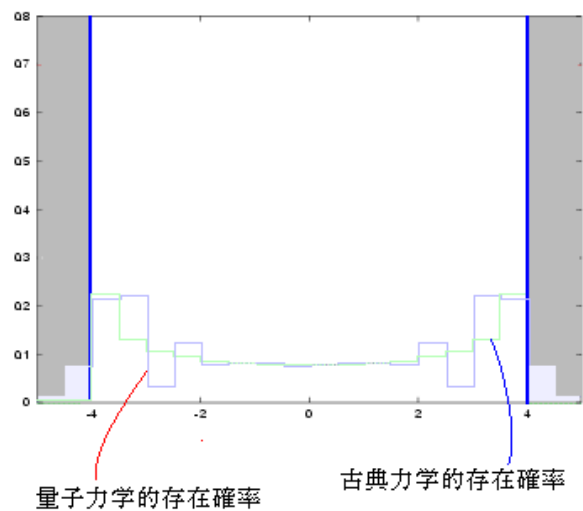


図 6:  $E = 8.28$  のときの確率分布

次に古典力学的には存在し得ない位置への、量子力学的な確率分布関数の染み出しの意味を考える。両わきの灰色の部分は、“位置ポテンシャルエネルギーが粒子のエネルギーよりも大きいので存在できない”部分である。さて、ここで不確定性原理の登場である。これは位置の精度  $\Delta x$  と運動量の精度  $\Delta p$  には

$$\Delta x^2 \Delta p^2 \geq \frac{\hbar}{4} \quad (41)$$

の関係がある、とするものだ。調和振動子のエネルギー精度は

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \Delta x^2 + \frac{1}{2m} \Delta p^2 \quad (42)$$

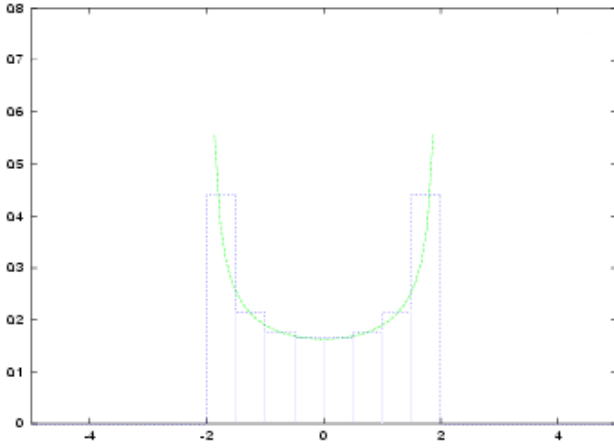


図 7: 確率分布関数の平均化 1

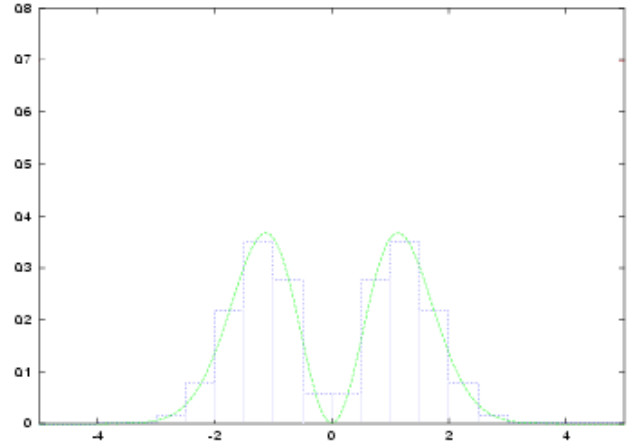


図 8: 確率分布関数の平均化 2

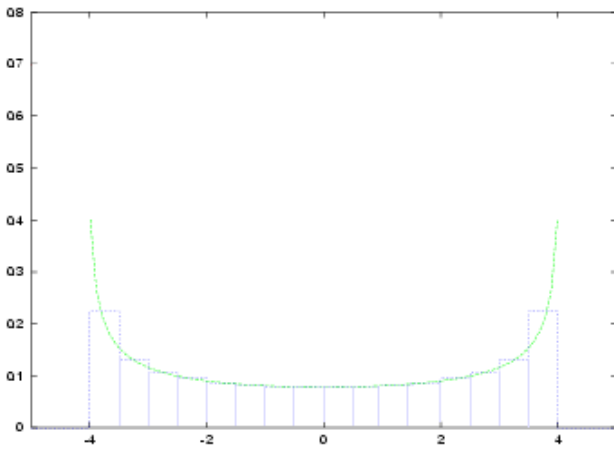


図 9: 確率分布関数の平均化 3

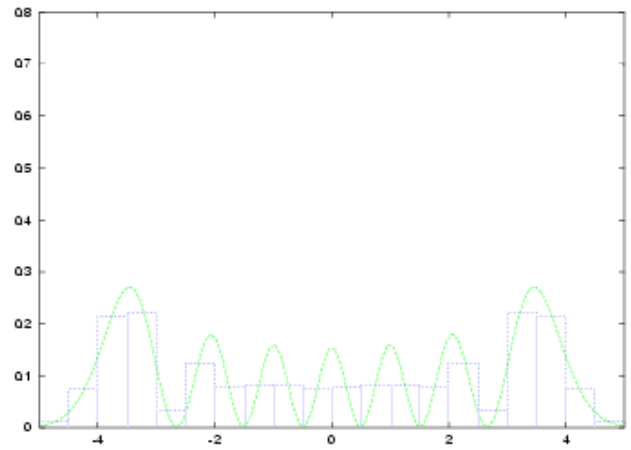


図 10: 確率分布関数の平均化 4

で与えられる。今、 $m = 1, \omega_0 = 1, \hbar = \frac{4}{\pi}$  なので

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \Delta p^2 \quad (43)$$

$$\Delta x^2 \Delta p^2 \geq \frac{1}{\pi} \quad (44)$$

となり、式 (41) を代入して  $\Delta p$  を消去し、 $\Delta x = 0.5$  を代入すると

$$\begin{aligned} \Delta E &\geq \frac{1}{2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi \Delta x^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 0.25 + \frac{1}{2 \pi \cdot 0.25} \\ &\geq \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi} \\ &\geq 0.76 \end{aligned} \quad (45)$$

となる。古典的振動幅  $a$  は式 (40) より

$$a = \sqrt{2E} \quad (46)$$

であるから、式 (45) よりその精度は

$$\begin{aligned} \Delta a &\geq \sqrt{2 \times 0.76} \\ &\geq 1.2 \end{aligned} \quad (47)$$

となる。したがって、古典論ではエネルギー的に存在し得ない部分への、量子力学的確率分布の染み出しは、不確定性原理によって粒子のエネルギーがある程度の幅を持つためのその分である、と理解できる。以上より、エネルギー保存則に違反することなく古典的には存在し得ないような場所に粒子が存在しても構わない、ということがわかる。

なお、以下に  $n = 1 \sim 6$  の古典論的、量子論的、それぞれの確率分布関数  $W(x)$  を様子を参考までに載せておく。

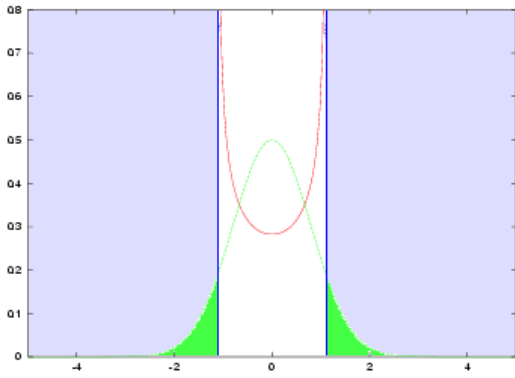


图 11:  $n=0$

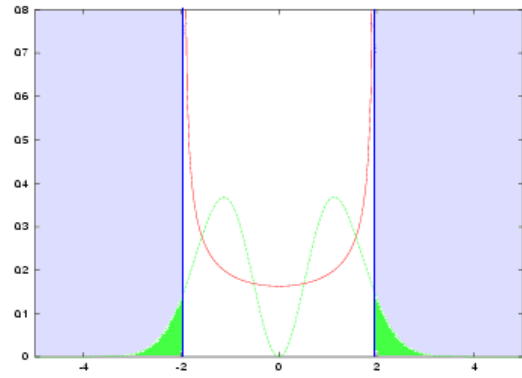


图 12:  $n=1$

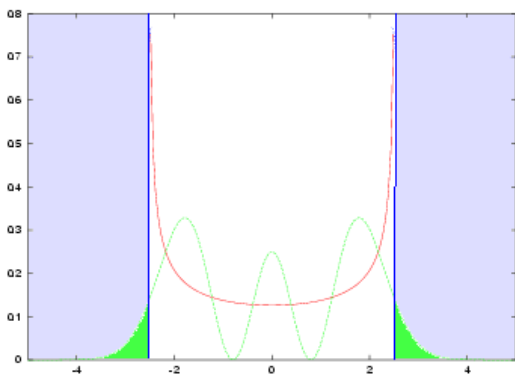


图 13:  $n=2$

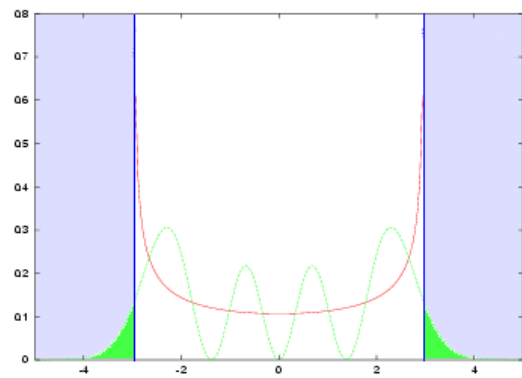


图 14:  $n=3$

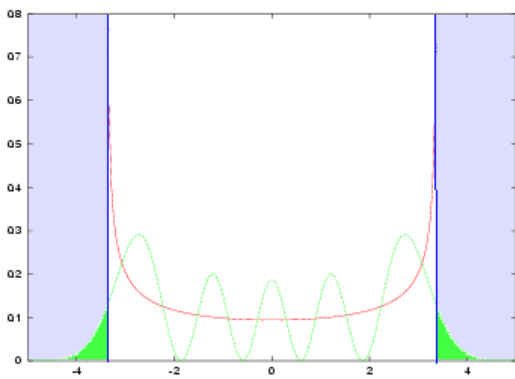


图 15:  $n=4$

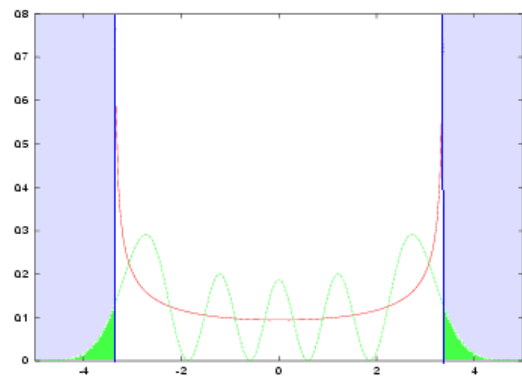


图 16:  $n=4$

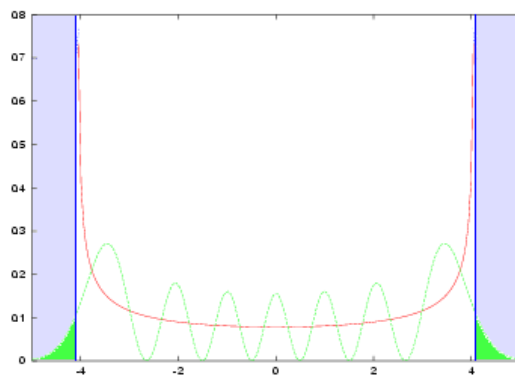


图 17:  $n=6$

## 参考文献

- [1] ロドリーグの公式 : [http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi\\_m/page022.htm](http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page022.htm)
- [2] 級数表記 : [http://ann.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~kotani/enshuu/mp2002/mp2ex\\_8.pdf](http://ann.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~kotani/enshuu/mp2002/mp2ex_8.pdf)
- [3] ガシオロウィッツ 量子力学 (訳者: 林 武美、北門新作)
- [4] 演習 量子力学 (著者: 岡崎 誠、藤原毅夫 / 出版社: サイエンス社)
- [5] グライナー 量子力学 (著者: Walter Greiner / 訳者: 伊藤 伸泰、早野 龍五)
- [6] ラグランジュアン : <http://homepage2.nifty.com/eman/analytic/contents.html>