強制振動子

淡幻星

2005.04.16

執筆開始日 2005.04.15〜

1　発端

「バネにつながれた荷電粒子に振動電場を掛けた場合の振る舞い（強制振動モデルと呼びます）を、述べてください。」という問題が発端でした。まぁ問題自体は学部時代（２年生あたり？）に何度か解いたことのあるはずのものです。んで「言葉で書いてもらっても良いですけど、余裕のある方は数式で示してください。そうですね、理論系の方はやれないと困るかな？」と言われまして、理論系の私としては「単に簡単な２階常微分方程式を解くだけだし、やってみましょう」と取り掛かったわけですよ。

運動方程式は以下ですね。ここでは外場に cos 形を仮定しています。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -\omega^2 r(t) - 2\gamma\frac{dr(t)}{dt} + E(t) \tag{1}$$

$$E(t) = E_0\cos\omega_0 t \tag{2}$$

$$\gamma : \text{抵抗係数} \tag{3}$$

なお、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ですね。定係数線形非斉次２階常微分方程式です。振動解を知りたいので、 $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ を仮定します。これを解いて、

$$\begin{aligned} r(t) = e^{-\gamma t}&\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) \\ &+ \frac{E_0}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_0\right)^2}\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0\sin\omega_0 t\right) \end{aligned} \tag{4}$$

となります。ここまでは頑張って計算するのみ。

問題は、その後です。「共鳴（ $\omega^2 = \omega_0^2$ ）時に一番振幅が大きくなる。正しいですね。んー、抵抗ない場合ってどうなるんだろう？ $\gamma \to 0$ で $\omega_0 \to \omega$ にすると . . . え？　時間に寄らず発散 !? 振幅無限大 !? んな馬鹿な !! 」　　たしかに、抵抗が無くて共鳴していれば、時間がたつにつれて段々振幅が大きくなっていくのが自然だと思いますけど、それにしたって時間ゼロから瞬間的に無限大の振幅ってのは、おかしいでしょう！　「 . . . あれ？」言ってたら、先生に「まぁＭ１（院生１年生）なんてそんなもんだよ。　学部の２年生くらいに戻れば、解けるでしょう（笑)。」とノタマワレマシタ。へぼいぞ、Ｍ１ . . . __/￣\○

2　解決

結論から言うと、微分方程式を解く過程で、係数 $\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$ で式を割り算するところがあるんですね。しかし、共鳴（ $\omega^2 = \omega_0^2$ ）時にこの式変形は正しくない。これが原因です。まぁ $\omega_0 \to \omega$ の極限を取る分には問題ないんですけど . . . これがなかなか上手く取れなくて、これもハマッた原因（苦笑）。

順に見ていきましょう。外場の振動数 ω_0 が固有振動数 ω より小さい場合、同じ場合、大きい場合の時間無限大での挙動を見てみます。抵抗係数 γ は有限とします。

$\omega_0^2 \ll \omega^2$ のときは

$$\begin{aligned} r(t) &\simeq e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + \frac{E_0}{\omega^4}\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0\sin\omega_0 t\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + E_0\left((\frac{1}{\omega^2}-\frac{\omega_0^2}{\omega^4})\cos\omega_0 t + 2\gamma\frac{\omega_0}{\omega^4}\sin\omega_0 t\right) \\ &\simeq e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + \frac{E_0}{\omega^2}\cos\omega_0 t \end{aligned} \tag{5}$$

よって

$$\lim_{t\to\infty} r(t) \simeq \frac{E_0}{\omega^2}\cos\omega_0 t$$

$\omega^2 = \omega_0^2$ のとき

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + \frac{E_0}{2\gamma\omega_0}\sin\omega_0 t \text{ よって} \\ \lim_{t\to\infty} r(t) &= \frac{E_0}{2\gamma\omega_0}\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{6}$$

$\omega^2 \ll \omega_0^2$ のときは

$$\begin{aligned} r(t) &\simeq e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + \frac{E_0}{\omega_0^4}\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0\sin\omega_0 t\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + E_0\left((\frac{\omega^2}{\omega_0^4}-\frac{1}{\omega_0^2})\cos\omega_0 t + 2\gamma\frac{1}{\omega_0^3}\sin\omega_0 t\right) \\ &\simeq e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) + \frac{E_0}{\omega_0^2} \end{aligned} \tag{7}$$

よって

$$\lim_{t\to\infty} r(t) \simeq \frac{E_0}{\omega_0^2}$$

問題ないですね（ ^^; ）。外場の振動数が小さい場合は、振幅一定値。同じところで共鳴し最大振幅（ $\omega_0 = \omega > \gamma \therefore \frac{E_0}{2\gamma\omega_0} > \frac{E_0}{\omega^2}$ ）となり、大きいところでは振幅はゼロに落ちていきます。なお、cos 形の外場に対しては、共鳴時は sin 形に、その前後では外場と同じ cos 形になっていきます。共鳴時は位相が $\frac{\pi}{2}$ 遅れるんですね。

さて、問題の $\omega_0^2 = \omega^2$ のときに $\omega^2 \gg \gamma^2 \sim 0$ を考察します。共鳴条件下で抵抗係数 γ を小さくしてき

ます。簡単のために初期条件を $r(0)=\frac{dr(0)}{dt}=0$ とすると、

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{E_0}{2\gamma\omega}\left(\sin\omega t - e^{-\gamma t}\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t\right) \\ \omega^2 \gg \gamma^2 \text{ より} & \\ &\simeq \frac{E_0}{2\gamma\omega}\left(\sin\omega t - e^{-\gamma t}\sin\omega t\right) \\ &= \frac{E_0}{2\gamma\omega}\left(1-e^{-\gamma t}\right)\sin\omega t \\ \text{よって} & \\ \lim_{\gamma\to 0} r(t) &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{E_0}{2\gamma\omega}\left(1-(1-\gamma t+o(2))\right)\sin\omega t \\ &\simeq \lim_{\gamma\to 0}\frac{E_0}{2\gamma\omega}\gamma t\sin\omega t \\ &= \frac{E_0}{2\omega}t\sin\omega t \end{aligned} \tag{8}$$

となります。よかった。発散せずに極限が取れた（＾▽＾）。

実際、 $\omega_0^2=\omega^2, \gamma^2=0$ として運動方程式

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -\omega^2 r(t) + E(t) \tag{9}$$

$$E(t) = E_0\cos\omega t \tag{10}$$

を解くと

$$r(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \frac{E_0}{2\omega}t\sin\omega t \tag{11}$$

初期条件 $r(0)=\frac{dr(0)}{dt}=0$ を代入すると

$$r(t) = \frac{E_0}{2\omega}t\sin\omega t \tag{12}$$

となって、無事に上で求めた極限に一致します。

つーか、物理数学の問題だよぉ。N先生なら「算数ですね」言うよぉ。解決してみたら、なんて単純なことなのでしょう。ただの極限操作の問題。凹む〜。